1. 函数 $f(x)=2x+3$，函数 $g(x)=x^2-x+1$，试求 (a) $g\circ f$；(b) $f\circ g$。

$g\circ f=g(2x+3)$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$=(2x+3)^2+(2x+3)+1$ ---------- $\boxed{1}$

$=4x^2+10x+10$ ---------- $\boxed{1}$

$f\circ g=f(x^2-x+1)$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$=2(x^2-x+1)+3$ ---------- $\boxed{1}$

$=2x^2-2x+5$ ---------- $\boxed{1}$

2. 求圆 $3x^2+3y^2-6x-2y=5$ 的圆心及其半径。

$x^2+y^2-2x-\frac{2}{3}y-\frac{5}{3}=0$ ---------- $\boxed{1}$

$2g=-2\Rightarrow g=-1$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$2f=-\frac{2}{3}\Rightarrow f=-\frac{1}{3}$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

圆心 $(h,k)=\left(1,\frac{1}{3}\right)$ ---------- $\boxed{1}$

半径 $r=\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$ ---------- $\boxed{2}$

3. 若 $\mathrm{A}(7,11)$，$\mathrm{B}(3,5)$ 与 $\mathrm{C}(p,p+1)$ 三点同在一条线上，求 p 的值。

Q 三点同在一条线上

$\therefore m_{\mathrm{AB}}=m_{\mathrm{BC}}$ ---------- $\boxed{1}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{11-5}{7-3}&=\frac{p+1-5}{p-3}\\ \frac{3}{2}&=\frac{p-4}{p-3}\\ 3p-9&=2p-8\end{aligned}\right\}$$ ---------- $\boxed{3}$

$p=1$ ---------- $\boxed{1}$

4. 求以连接 $\mathrm{A}(-2,3)$ 及 $\mathrm{B}(4,1)$ 两点的线段为直径的圆的方程式。

方法 1：

$(x+2)(x-4)+(y-3)(y-1)=0$ ---------- $\boxed{2}$

$x^2-2x-8+y^2-4y+3=0$ ---------- $\boxed{2}$

$x^2+y^2-2x-4y-5=0$ ---------- $\boxed{1}$

方法 2：

$(h,k)=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{3+1}{2}\right)=(1,2)$ ---------- $\boxed{1}$

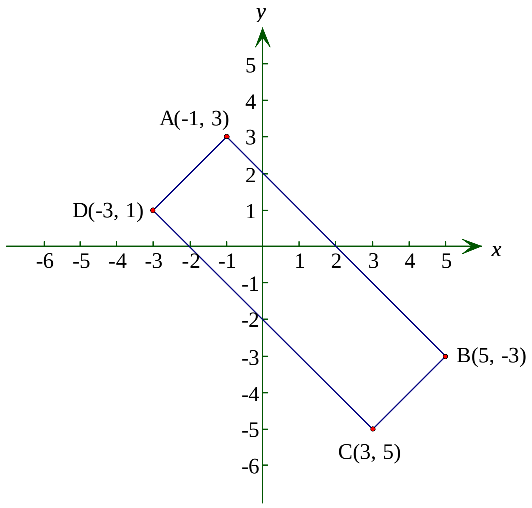
$r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2-4)^2+(3-1)^2}=\sqrt{10}$ ---------- $\boxed{1}$

$(x-1)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2$ ---------- $\boxed{1}$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4=10$ ---------- $\boxed{1}$

$x^2+y^2-2x-4y-5=0$ ---------- $\boxed{1}$

5. 证明 $(3,-5)$，$(-1,3)$，$(5,-3)$，$(-3,1)$ 为一长方形的四个顶点。



--- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$m_{\mathrm{AB}}=\frac{3+3}{-1-5}=-1$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$m_{\mathrm{CD}}=\frac{1+5}{-3-3}=-1$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

Q $m_{\mathrm{AB}}=m_{\mathrm{CD}}=-1$ $\therefore \mathrm{AB}//\mathrm{CD}$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$m_{\mathrm{AD}}=\frac{3-1}{-1+3}=1$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$m_{\mathrm{BC}}=\frac{-3+5}{5-3}=1$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

Q $m_{\mathrm{AD}}=m_{\mathrm{BC}}=1$ $\therefore \mathrm{AD}//\mathrm{BC}$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ ABCD 为平行四边形 ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

Q $m_{\mathrm{AB}}\times m_{\mathrm{AD}}=-1$ $\therefore \angle\mathrm{A}=90^\circ$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ ABCD 为长方形的四个顶点。 ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

6. 求两直线 $2x+3y-2=0$ 及 $x-4y-1=0$ 的交点 P 的坐标；若一直线经过点 P，且与直线 $3x-4y+5=0$ 平行，求此直线之方程式。

$\begin{cases}2x+3y-2=0\\x-4y-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ ---------- $\boxed{2}$

方法 1：

设：所求的方程式为 $3x-4y+k=0$ ---------- $\boxed{1}$

经 $(1,0)$

$3(1)-4(0)+k=0 \Rightarrow k=-3$ ---------- $\boxed{1}$

$\therefore$ 所求的方程式为 $3x-4y-3=0$ ---------- $\boxed{1}$

方法 2：

$3x-4y+5=0$ 的斜率为 $\frac{3}{4}$ ---------- $\boxed{1}$

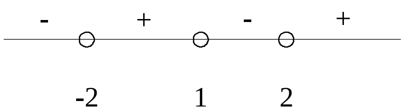
$(y-0)=\frac{3}{4}(x-1)$ ---------- $\boxed{1}$

$3x-4y-3=0$ ---------- $\boxed{1}$

7. 解不等式 $\frac{(x+1)^2(1-x)^3}{(x+2)(x-2)}<0$

$(x+1)^2(1-x)^3(x+2)(x-2)<0$ ---------- $\boxed{1}$

$(x+1)^2(x-1)^3(x+2)(x-2)>0$ ---------- $\boxed{1}$



---------- $\boxed{1}$

解集 $=\{x\,|\,-2<x<1,\ x\neq -1\}\cup\{x\,|\,x>2\}$ ---------- $\boxed{2}$

8. 三角形的三个顶点分别为 $A(3,7)$，$B(2,-3)$ 及 $C(-1,4)$。求由顶点 B 到 AC 边上的高。

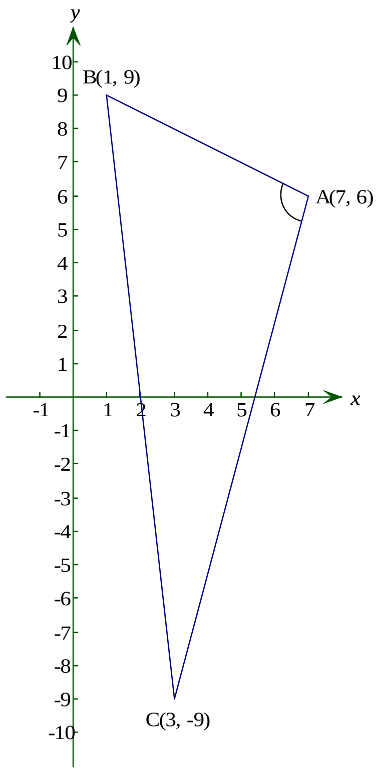
$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3&7&1\\-1&4&1\\2&-3&1\end{vmatrix}=\frac{37}{2}$ ---------- $\boxed{2}$

$AC=\sqrt{(3+1)^2+(7-4)^2}=5$ ---------- $\boxed{1}$

$\frac{37}{2}=\frac{1}{2}\times h\times 5$ ---------- $\boxed{1}$

$h=\frac{37}{5}$（单位） ---------- $\boxed{1}$

9. 若三角形的三个顶点分别为 $A(7,6)$，$B(1,9)$，$C(3,-9)$，试求 $\angle A$。



---------- $\boxed{1\frac{1}{2}}$

$m_{AB}=\frac{9-6}{1-7}=-\frac{1}{2}$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$m_{AC}=\frac{6+4}{7-3}=\frac{15}{4}$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\tan A=\frac{m_{AC}-m_{AB}}{1+m_{AC}m_{AB}}$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$=\frac{\frac{15}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(\frac{15}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$=-\frac{34}{7}$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\angle A=101°38'$ ---------- $\boxed{1}$

10. 若两平行线 $3x-4y+k=0$ 和 $6x-8y+5=0$ 的距离是 $\frac{5}{2}$，求 k 的值。

方法 1：

$3x-4y+k=0 \Rightarrow 6x-8y+2k=0$ ---------- $\boxed{1}$

$\frac{5}{2}=\left|\frac{2k-5}{\sqrt{6^2+8^2}}\right|$ ---------- $\boxed{1}$

$\pm\frac{5}{2}=\frac{2k-5}{10}$ ---------- $\boxed{1}$

$\frac{5}{2}=\frac{2k-5}{10}\Rightarrow k=15$ ---------- $\boxed{1}$

$-\frac{5}{2}=\frac{2k-5}{10}\Rightarrow k=-10$ ---------- $\boxed{1}$

<u>方法2</u>：

在直线 $6x-8y+5=0$ 取一点 $\left(-\frac{5}{6},0\right)$ ---------- $\boxed{1}$

$\frac{5}{2}=\left|\frac{3\left(-\frac{5}{6}\right)+k}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|$ ---------- $\boxed{1}$

$\pm\frac{5}{2}=\frac{k-\frac{5}{2}}{5}$ ---------- $\boxed{1}$

$\frac{5}{2}=\frac{k-\frac{5}{2}}{5}\Rightarrow k=15$ ---------- $\boxed{1}$

$-\frac{5}{2}=\frac{k-\frac{5}{2}}{5}\Rightarrow k=-10$ ---------- $\boxed{1}$

11. 若 $f(x)=2x+1$ 且 $f\left[g(x)\right]=x^2+x+g(x)$，求 $g(x)$；据此，求 $g^{-1}(5)$。

$2g(x)+1=x^2+x+g(x)$ ---------- $\boxed{1}$

$g(x)=x^2+x-1$ ---------- $\boxed{1}$

$x^2+x-1=5$ ---------- $\boxed{1}$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$ ---------- $\boxed{1}$

$x=-3$ 或者 $x=2$ ---------- $\boxed{1}$

12. 解方程式 $\begin{vmatrix}1-5x & 2 & 3\\ 1 & 2-5x & 3\\ 1 & 2 & 3-5x\end{vmatrix}=0$。

$\begin{vmatrix}6-5x & 2 & 3\\ 6-5x & 2-5x & 3\\ 6-5x & 2 & 3-5x\end{vmatrix}=0\left[C_1:C_1+C_2+C_3\right]$ ---------- $\boxed{1}$

$(6-5x)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2-5x & 3\\ 1 & 2 & 3-5x\end{vmatrix}=0$ ---------- $\boxed{1}$

$(6-5x)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -5x & 0\\ 0 & 0 & -5x\end{vmatrix}=0\begin{bmatrix}R_2:R_1(-1)+R_2\\ R_3:R_1(-1)+R_3\end{bmatrix}$ ---------- $\boxed{1}$

$(6-5x)\times 25x^2=0$ ---------- $\boxed{1}$

$x=\frac{6}{5}$ 或者 $x=0$ ---------- $\boxed{1}$

13. (a) 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$，试求

i. $|A|$；

$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}=-10$ ---------- $\boxed{1}$

ii. $\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-10 & 5 & 5\\ 6 & -1 & -7\\ -4 & -1 & 3\end{pmatrix}$ ---------- $\boxed{2}$

$\therefore Adj\ A=\begin{pmatrix}-10 & 6 & -4\\ 5 & -1 & -1\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}$ ---------- $\boxed{1}$

iii. A^{-1}

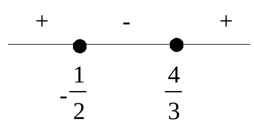
$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times adj\ A=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-10 & 6 & -4\\ 5 & -1 & -1\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}$ ---------- $\boxed{1}$

(b) 解不等式 $\frac{x^2-9x+11}{x^2-2x+1}\geq 7$。

$\frac{x^2-9x+11}{x^2-2x+1}-7\geq 0$ ---------- $\boxed{1}$

$\frac{(3x-4)(2x+1)}{(x-1)^2}\leq 0$ ---------- $\boxed{1}$

$(x-1)^2(3x-4)(2x+1)\leq 0$ ---------- $\boxed{1}$



---------- $\boxed{1}$

$\therefore$ 解集 $=\left\{x\mid -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{4}{3}\right\}\setminus\{1\}$ ---------- $\boxed{1}$

14. (a) 以克兰姆法则解 $\begin{cases}3z+x-2y=6\\2x+3y-4z-20=0\\3x-5z-2y=6\end{cases}$

$\begin{cases}3z+x-2y=6\\2x+3y-4z-20=0\\3x-5z-2y=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y+3z=6\\2x+3y-4z=20\\3x-2y-5z=6\end{cases}$ ------------ $\boxed{1}$

$\Delta=\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&3&-4\\3&-2&-5\end{vmatrix}=-58$ ------------------------------------ $\boxed{1}$

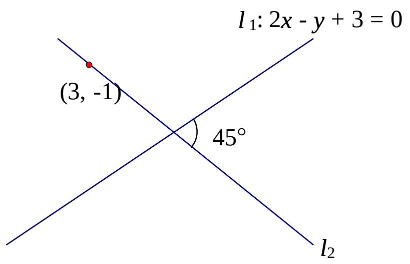
$\Delta_x=\begin{vmatrix}6&-2&3\\20&3&-4\\6&-2&-5\end{vmatrix}=-464\Rightarrow x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{-464}{-58}=8$ ------ $\boxed{1}$

$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&6&3\\2&20&-4\\3&6&-5\end{vmatrix}=-232\Rightarrow y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-232}{-58}=4$ ------ $\boxed{1}$

$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&-2&6\\2&3&20\\3&-2&6\end{vmatrix}=-116\Rightarrow z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{-116}{-58}=2$ ------ $\boxed{1}$

(b) 一直线 $2x-y+3=0$，将此直线化为 $y=mx+c$ 的形式，并求其斜率；据此，求通过 $\mathrm{A}(3,-1)$ 点且与直线 $2x-y+3=0$ 相交成 45° 角的直线之方程式。

设：$l_1: 2x-y+3=0$，所求的直线方程为 l_2



$2x-y+3=0\Rightarrow y=2x+3$ ------------------------------ $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore m_1=2$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\tan 45^\circ=\left|\dfrac{m_2-2}{1+2m_2}\right|$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{m_2-2}{1+2m_2}=\pm1$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{m_2-2}{1+2m_2}=1\Rightarrow m_2=-3$ -------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$y+1=-3(x-3)$ --- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$3x+y-8=0$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{m_2-2}{1+2m_2}=-1\Rightarrow m_2=\dfrac{1}{3}$ -------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$y+1=\dfrac{1}{3}(x-3)$ --- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$x-3y-6=0$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

15. (a) 函数 $g(x)=2x+1$，试求 $g^3(x)$；若 $g^{-1}(x)=g^2(x)$，试求 x 之值。

$g^2(x)=g[g(x)]$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$=2(2x+1)+1$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$=4x+3$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$g^3(x)=g\left[g^2(x)\right]$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$=2(4x+3)+1$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$=8x+7$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$g^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{2}$ -- $\boxed{1}$

$\dfrac{x-1}{2}=4x+3$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$x=-1$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

(b) 如果 $f(x)=x+2$，及 $g\circ f(x)=x^3+4x^2+7x+2$，求 $g(x)$。

方法 1：

$g(x+2)=x^3+4x^2+7x+2$ ------------------------------ $\boxed{1}$

令 $y=x+2\Rightarrow x=y-2$ ------------------------------ $\boxed{1}$

$g(y)=(y-2)^3+4(y-2)^2+7(y-2)+2$ -------------- $\boxed{1}$

$=y^3-6y^2+12y-8+4y^2-16y+16+7y-14+2$ $\boxed{1}$

$=y^3-2y^2+3y-4$

$\therefore g(x)=x^3-2x^2+3x-4$ ------------------------------ $\boxed{1}$

<u>方法 2</u>：

$g(x+2)=x^3+4x^2+7x+2$ -------------------------------- $\boxed{1}$

令 $g(x+2)=\mathrm{A}(x+2)^3+\mathrm{B}(x+2)^2+\mathrm{C}(x+2)+\mathrm{D}$ --- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$$
\left.\begin{array}{rrrr|r}
1 & 4 & 7 & 2 & -2 \\
 & -2 & -4 & -6 & \\
\hline
1 & 2 & 3 & \underline{\underline{-4}} & \\
 & -2 & 0 & & \\
\hline
1 & +0 & \underline{\underline{3}} & & \\
 & -2 & & & \\
\hline
1 & \underline{\underline{-2}} & & &
\end{array}\right\}
$$
-------------- $\boxed{1\frac{1}{2}}$

$g(x+2)=(x+2)^3-2(x+2)^2+3(x+2)-4$ ------------------ $\boxed{1}$

$\therefore g(x)=x^3-2x^2+3x-4$ --- $\boxed{1}$

16. (a) 解不等式 $\left|x^2-3x-4\right|<x+1$

$-(x+1)<x^2-3x-4<x+1$ ------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

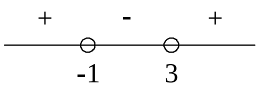
$\begin{cases} x^2-3x-4>-(x+1)---(1) \\ x^2-3x-4<x+1-----(2) \end{cases}$ ------------------------ $\boxed{\frac{1}{2}}$

由(1)

$x^2-3x-4>-x-1$

$x^2-2x-3>0$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$(x-3)(x+1)>0$



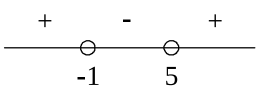
--------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore x<-1$ 或者 $x>3$ --------------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

由(2)

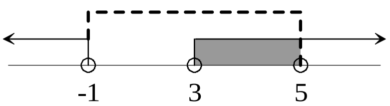
$x^2-4x-5<0$

$(x+1)(x-5)<0$ --------------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$



--------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore -1<x<5$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$



-------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ 解集 $=\{x\,|\,3<x<5\}$ -------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

(b) 一圆 $x^2+y^2-2x+2y-2=0$ 的切线垂直于 $4x-3y=0$，求其切线的方程式。

$2g=-2\Rightarrow g=-1 \qquad 2f=2\Rightarrow f=1$ ------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore (h,k)=(1,-1)$ ----------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$r=\sqrt{(-1)^2+1^2+2}=2$ ----------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

设：所求的切线方程式为 $3x+4y+k=0$ ------------ $\boxed{\frac{1}{2}}$

$2=\left|\dfrac{3+4(-1)+k}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\pm 2=\dfrac{k-1}{5}$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{k-1}{5}=2\Rightarrow k=11$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore 3x+4y+11=0$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{k-1}{5}=-2\Rightarrow k=-9$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore 3x+4y-9=0$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

17. (a) 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-5}{2x+m}$，若 $f^{-1}(x)=f(x)$，求 m 的值。

令 $y=\dfrac{x-5}{2x+m}\Rightarrow x=\dfrac{y-5}{2y+m}$ ---------------------------- $\boxed{1}$

$$
\left.\begin{aligned}
2xy+mx&=y-5 \\
2xy-y&=-mx-5 \\
y(2x-1)&=-mx-5 \\
y&=\frac{-mx-5}{2x-1}
\end{aligned}\right\}
$$
-------------------------------------- $\boxed{1}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{-mx-5}{2x-1}$ -- $\boxed{1}$

$$
\left.\begin{aligned}
f(x)&=f^{-1}(x) \\
\frac{x-5}{2x+m}&=\frac{-mx-5}{2x-1}
\end{aligned}\right\}
$$
--------------------------------------- $\boxed{1}$

$\therefore m=-1$ -- $\boxed{1}$

(b) 已知直线 $l_1 : ax+(a-1)y+5=0$ 与直线 $l_2 : (a+2)x+ay-1=0$，试回答下列各题：

$l_1 : ax+(a-1)y+5=0 \Rightarrow m_1 = -\dfrac{a}{a-1}$ ------------------ $\boxed{\frac{1}{2}}$

$l_2 : (a+2)x+ay-1=0 \Rightarrow m_2 = -\dfrac{a+2}{a}$ ---------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

(i) 若 l_1 与 l_2 平行，试求 a 的值；

$\because l_1 // l_2 \quad \therefore m_1 = m_2$ -------------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{a}{a-1} = \dfrac{a+2}{a}$ --- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$a^2 = a^2 + a - 2 \Rightarrow a = 2$ ----------------------------------- $\boxed{1}$

(ii) 若 l_1 与 l_2 互相垂直，试求 a 的值。

$\because l_1 \perp l_2 \quad \therefore m_1 \times m_2 = -1$ --------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{a}{a-1} \times \dfrac{a+2}{a} = -1$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{a+2}{a-1} = -1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$ -------------------------------------- $\boxed{1}$

18. (a) 试证明

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} [R_3 : R_1 + R_3]$ ---------- $\boxed{1}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ --------------------------------- $\boxed{1}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} C_2 : C_2 - C_1 \\ C_3 : C_3 - C_1 \end{bmatrix}$ - $\boxed{1}$

$= (a+b+c)\left[(b-a)(c^2-a^2)-(b^2-a^2)(c-a)\right]$ --- $\boxed{1}$

$= (a+b+c)\left[(b-a)(c+a)(c-a)-(b+a)(b-a)(c-a)\right]$

$= (a+b+c)(b-a)(c-a)(a+c-a-b)$ ----------------- $\boxed{1}$

$= (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$

(b) 已知三角形的面积为 5 平方单位，它的两个顶点是 $A(3,3)$ 及 $B(7,4)$，而第三顶点 C 在直线 $x=3y$ 上，求 C 的坐标。

$\because$ C 在 $x=3y$ 上，$\therefore C(3y, y)$ ------------------------------ $\boxed{1}$

$\pm 5 = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 7 & 3y & 3 \\ 3 & 4 & y & 3 \end{vmatrix}$ ------------------------------------- $\boxed{1}$

$y - 9 = \pm 10$ -- $\boxed{1}$

$y - 9 = 10 \Rightarrow y = 19$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore C(57, 19)$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$y - 9 = -10 \Rightarrow y = -1$ --------------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\therefore C(-3, -1)$ --- $\boxed{\frac{1}{2}}$

19. 一圆通过点 $(2,-1)$ 且与直线 $x-y-1=0$ 相切；若圆心落在 $y+2x=0$ 上，求这个圆的方程式。

设：此圆的方程式为 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ---------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

圆心在 $y+2x=0$ 上，$\therefore k=-2h$ ------------------------ $\boxed{\frac{1}{2}}$

经 $(2,-1)$，$(2-h)^2+(-1-k)^2=r^2$ -------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

将 $k=-2h$ 代入

$(2-h)^2+(2h-1)^2=r^2$ ------------------------------------ $\boxed{\frac{1}{2}}$

整理得 $5h^2-8h+5=r^2$ ------------------------------------ $\boxed{\frac{1}{2}}$

$r=\left|\frac{h-k-1}{\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{3h-1}{\sqrt{2}}\right|$ -------------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$5h^2-8h+5=\frac{(3h-1)^2}{2}$ ------------------------------------ $\boxed{\frac{1}{2}}$

整理得 $h^2-10h+9=0$ ------------------------------------ $\boxed{\frac{1}{2}}$

$h=1$ 或者 $h=9$ -- $\boxed{1}$

当 $h=1, k=-2$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$r^2=5(1)^2-8+5=2$ -- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$(x-1)^2+(y+2)^2=2$ -------------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$x^2-2x+1+y^2+4y+4=2$ ------------------------------ $\boxed{\frac{1}{2}}$

$x^2+y^2-2x+4y+3=0$ ------------------------------------ $\boxed{\frac{1}{2}}$

当 $h=9, k=-18$ --- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$r^2=5(9)^2-8(9)+5=338$ ------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$(x-9)^2+(y+18)^2=338$ ---------------------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$x^2-18x+81+y^2+36y+324=338$ -------------------- $\boxed{\frac{1}{2}}$

$x^2+y^2-18x+36y+67=0$ ------------------------------ $\boxed{\frac{1}{2}}$